DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2019. 09. 23. 2019A073

一类具有毒素的非均匀chemostat模型正解的存在性和稳定性*

李海侠

宝鸡文理学院数学与信息科学学院,陕西 宝鸡 721013

摘　要：研究了一类具有毒素的非均匀chemostat食物链模型。利用最大值原理和上下解方法给出了正解的先验估计。接着运用简单特征值的分歧理论探讨了正解的全局分支，得到了正解存在的充要条件。最后采用线性算子的扰动理论和分歧解的稳定性理论讨论了正分歧解的稳定性。研究结果表明在毒素的影响和适当条件下物种能够共存且正解稳定。

关键词：非均匀chemostat模型；分歧理论；全局分支；稳定性
中图分类号：O175. 26　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529 -6579（2021）03 -0167 -07

Existence and stability of positive solutions for an unstirred chemostat model with toxins

LI Haixia

Institute of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China

Abstract: A food chain unstirred chemostat model with toxins is investigated. A priori estimate of positive solutions is given by the maximum principle and the super and sub-solution method. Then by using the bifurcation theory of simple eigenvalues, the global branch of positive solutions is studied, and the sufficient and necessary conditions for the existence of positive solutions are obtained. Finally, the stability of positive bifurcating solutions is discussed by means of the perturbation theory of linear operators and the stability theory of bifurcation solutions. The research results indicate that the species can coexist and positive solutions are stable under the influence of toxins and appropriate conditions.

Key words: unstirred chemostat model; bifurcation theory; global branch; stability

本文研究如下具有毒素的非均匀chemostat食物链模型

$$\begin{cases} S_t = \Delta S - auf(S,u), \quad x \in \Omega, t > 0, \\ u_t = \Delta u + auf(S,u) - bvg(u,v) - \gamma pu, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v + b(1-k)vg(u,v), \quad x \in \Omega, t > 0, \\ p_t = \Delta p + bkvg(u,v), \quad x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial n} + rS = S^0(x), \dfrac{\partial u}{\partial n} + ru = \dfrac{\partial v}{\partial n} + rv = \dfrac{\partial p}{\partial n} + rp = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \\ S(x,0) = S_0(x) \geqslant 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad u(x,0) \not\equiv 0, \quad x \in \Omega, \\ v(x,0) = v_0(x) \geqslant 0, \quad v(x,0) \not\equiv 0, \quad p(x,0) = p_0(x) \geqslant 0, \quad p(x,0) \not\equiv 0, \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

* 收稿日期：2019 -09 -23　　录用日期：2020 -09 -18　　网络首发日期：2021 -01 -08
基金项目：国家自然科学基金（11801013）；陕西省自然科学基础研究计划项目（2018JQ1066）；宝鸡市科技计划项目（2018JH-20）；宝鸡文理学院博士科研项目（ZK2018069）
作者简介：李海侠（1977年生），女；研究方向：偏微分方程应用及其可视化；E-mail：xiami0820@163. com

其中$S(x,t),u(x,t),v(x,t),p(x,t)$分别为反应器中营养物、两微生物和毒素的浓度。$\Omega$是$\mathbf{R}^N$中带有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域。$f(S,u)=S/(1+h_1S+m_1u),g(u,v)=u/(1+h_2u+m_2v)$是Beddington-DeAngelis反应函数，刻画了物种的生长规律，$h_i,m_i(i=1,2)$都是正常数。$a,b>0$分别是u和v的最大生长率。$\gamma>0$为毒素p对微生物u生长的致命作用。$0<k<1$为用于生产毒素的消耗部分。$S^0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0$是营养物的输入浓度。

本文主要考察系统（1）的平衡态系统：

$$\begin{cases}\Delta S-auf(S,u)=0, & x\in\Omega,\\ \Delta u+auf(S,u)-bvg(u,v)-\gamma pu=0, & x\in\Omega,\\ \Delta v+b(1-k)vg(u,v)=0, & x\in\Omega,\\ \Delta p+bkvg(u,v)=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial S}{\partial n}+rS=S^0(x),\dfrac{\partial u}{\partial n}+ru=\dfrac{\partial v}{\partial n}+rv=\dfrac{\partial p}{\partial n}+rp=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{2}$$

因为系统（2）的非负解才有意义，故重新定义反应函数如下：

$$\tilde f(S,u)=\begin{cases}f(S,u), & S\geqslant 0,u\geqslant 0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad \tilde g(u,v)=\begin{cases}g(u,v), & u\geqslant 0,v\geqslant 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

方便起见，记$\tilde f(S,u),\tilde g(u,v)$分别仍为$f(S,u),g(u,v)$。

令$M(x)=(1-k)p-kv$，则由系统（2）可得

$$\Delta M=0,\quad x\in\Omega;\qquad \frac{\partial M}{\partial n}+rM=0,\quad x\in\partial\Omega.$$

由线性椭圆方程的性质和最大值原理可知$M\equiv 0$，即$p=\dfrac{k}{1-k}v\triangleq\alpha v$。则系统（2）简化为

$$\begin{cases}\Delta S-auf(S,u)=0, & x\in\Omega,\\ \Delta u+auf(S,u)-bvg(u,v)-\gamma\alpha uv=0, & x\in\Omega,\\ \Delta v+b(1-k)vg(u,v)=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial S}{\partial n}+rS=S^0(x)\geqslant 0,\quad S^0(x)\not\equiv 0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial n}+ru=\dfrac{\partial v}{\partial n}+rv=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{3}$$

近些年来恒化器（chemostat）模型由于应用广泛引起了国内外学者的重视[1-17]。由于污染环境中的毒素会对连续培养的微生物产生影响，因此具有毒素的chemostat模型的研究成为了焦点[3,5,8,11,13,15]，其中文献［8，11，13，15］分别考察了具有毒素的非均匀chemostat竞争模型正稳态解的存在性、唯一性和稳定性。当不考虑毒素时，文献［7］在一维空间下考察了该非均匀chemostat模型，得到了正平衡态解的存在性、稳定性和系统的渐近行为，文献［16］讨论了$f(S,u),g(u,v)$为Crowley-Martin反应函数的非均匀chemostat模型，考察了系统正解的存在性、稳定性和唯一性。本文研究具有毒素影响的非均匀chemostat食物链模型（3），通过分歧理论和稳定性理论考察正解的全局存在性和稳定性。

1 正解的先验估计

首先给出一些预备知识和半平凡解的性质。

引理1[18] 设$q_1(x),q_2(x)\in C(\overline{\Omega})$且$q_1(x)\geqslant 0,q_2(x)>0$。令$\delta_i(q_1,q_2)(i\geqslant 1)$是问题

$$-\Delta\phi+q_1\phi=\delta_iq_2\phi,\quad x\in\Omega;\qquad \frac{\partial\phi}{\partial n}+r\phi=0,\quad x\in\partial\Omega$$

的特征值。则$0<\delta_1(q_1,q_2)<\delta_2(q_1,q_2)\leqslant\cdots\to\infty,\delta_i(q_1,q_2)$关于$q_1(x),q_2(x)$连续且若$q_1\leqslant q_1'$，则$\delta_i(q_1,q_2)\leqslant\delta_i(q_1',q_2)$；若$q_2\leqslant q_2'$，则$\delta_i(q_1,q_2)\geqslant\delta_i(q_1,q_2')$，且$\delta_1(q_1,q_2)$是简单的。

由椭圆方程的最值原理可知如下问题

$$\Delta z=0,\quad x\in\Omega;\qquad \frac{\partial z}{\partial n}+rz=S^0(x),\quad x\in\partial\Omega$$

存在唯一正解，记为z。显然，$(z,0,0)$是系统（3）的平凡解。

下面寻找系统（3）的半平凡解。令λ_1为如下特征值问题

$$\Delta\psi + \lambda_1 f(z,0)\psi = 0, \quad x \in \Omega; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} + r\psi = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

的主特征值，相应的特征函数分别为ψ_1且$\|\psi_1\|_2 = 1$。

引理2[16]　考虑问题

$$\Delta u + auf(z-u,u) = 0, \quad x \in \Omega; \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + ru = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{4}$$

则$a \leqslant \lambda_1$时问题（4）只有零解；当$a > \lambda_1$时问题（4）存在唯一正解记为θ，且θ满足以下条件：

（i）$\theta < z$；

（ii）当$a > \lambda_1$时，θ连续可微且当a增大时θ也逐点递增；

（iii）若记问题（4）在θ处的线性化算子为L，则

$$L = -\Delta - a[f(z-\theta,\theta) - \theta f_1'(z-\theta,\theta) + \theta f_2'(z-\theta,\theta)]$$

且其所有特征值都大于0。

于是当$a > \lambda_1$时，系统（3）存在唯一半平凡解$(z-\theta,\theta,0)$。最后给出系统（3）正解的先验估计。设λ_1^*为如下特征值问题

$$\Delta\varphi + \lambda_1^* g(\theta,0)\varphi = 0, \quad x \in \Omega; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} + r\varphi = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

的主特征值，相应的特征函数为φ_1且$\|\varphi_1\|_2 = 1$。

引理3　如果(S,u,v)是系统（3）的非负解且$u \not\equiv 0, v \not\equiv 0$，则

$$0 < S < z; \qquad 0 < S + u + \frac{v}{1-k} \leqslant z; \qquad a > \lambda_1; \qquad u \leqslant \theta; \qquad v \leqslant z(1-k); \qquad b > \frac{\lambda_1^*}{1-k}.$$

证明　首先由强最大值原理可知$S > 0, u > 0, v > 0$。令$P = z - S - u - v/(1-k)$，则

$$-\Delta P = \gamma\alpha uv \geqslant 0, \quad x \in \Omega; \qquad \frac{\partial P}{\partial n} + rP = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

又由最大值原理可知$P \geqslant 0$，即$0 < S + u + v/(1-k) \leqslant z$。于是$0 < S < z, S \leqslant z - u, v \leqslant z(1-k)$且$S \leqslant z - v/(1-k)$。关于$a > \lambda_1$的证明与文献［2］中引理4.1类似。

根据系统（3）的第二个方程得

$$\Delta u + auf(S,u) - bvg(u,v) - \gamma\alpha uv \leqslant \Delta u + auf(S,u) \leqslant \Delta u + auf(z-u,u).$$

于是u是问题（4）的下解，又z是问题（4）的上解，故由$a > \lambda_1$和上下解方法可知$u \leqslant \theta$。$b > \dfrac{\lambda_1^*}{1-k}$的证明同$a > \lambda_1$。

设$z' = z - S$，则系统（3）成为

$$\begin{cases} \Delta z' + auf(z-z',u) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \Delta u + auf(z-z',u) - bvg(u,v) - \gamma\alpha uv = 0, \quad x \in \Omega, \\ \Delta v + b(1-k)vg(u,v) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial z'}{\partial n} + rz' = 0, \dfrac{\partial u}{\partial n} + ru = \dfrac{\partial v}{\partial n} + rv = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

显然（0,0,0）是系统（5）的平凡解，当$a > \lambda_1$时，$(\theta,\theta,0)$是系统（5）的唯一半平凡解。

2　正解的全局分支

本节将以b为分歧参数利用局部分歧和全局分歧理论讨论系统（3）从半平凡解分支$\{(b,z-\theta,\theta,0): b > 0\}$产生的正解的存在条件。虽然文献［7，16］也讨论了类似系统的全局分歧，但本文由于毒素的引入使得所要考察的系统更复杂，因此局部分歧和全局分歧条件的讨论更加困难。令

$$C_B^1(\overline{\Omega}) = \{u \in C^1(\overline{\Omega}): \frac{\partial u}{\partial n} + ru = 0, x \in \partial\Omega\}, \qquad E = C_B^1(\overline{\Omega}) \times C_B^1(\overline{\Omega}) \times C_B^1(\overline{\Omega}),$$

$$P = \{(b,S,u,v) \in \mathbf{R}^+ \times E: S > 0, u > 0, v > 0, x \in \overline{\Omega}\}.$$

设$\xi = z' - \theta, U = \theta - u, V = v$，则系统（5）为

$$\begin{cases}-\Delta\xi=-a\theta f_1'(z-\theta,\theta)\xi-a[f(z-\theta,\theta)+\theta f_2'(z-\theta,\theta)]U+F_1(\xi,U,V),x\in\Omega,\\-\Delta U=a[f(z-\theta,\theta)+\theta f_2'(z-\theta,\theta)]U+a\theta f_1'(z-\theta,\theta)\xi+[bg(\theta,0)+\gamma\alpha\theta]V+F_2(\xi,U,V),x\in\Omega,\\-\Delta V=b(1-k)g(\theta,0)V+F_3(\xi,U,V),x\in\Omega,\\\frac{\partial\xi}{\partial n}+r\xi=0,\frac{\partial U}{\partial n}+rU=\frac{\partial V}{\partial n}+rV=0,\qquad x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$F_1(\xi,U,V)=a(\theta-U)[f(z-\xi-\theta,\theta-U)-f(z-\theta,\theta)]+a\theta[f_1'(z-\theta,\theta)\xi+f_2'(z-\theta,\theta)U],$$
$$F_2(\xi,U,V)=-a(\theta-U)[f(z-\xi-\theta,\theta-U)-f(z-\theta,\theta)]-a\theta[f_1'(z-\theta,\theta)\xi+f_2'(z-\theta,\theta)U]+bV[g(\theta-U,V)-g(\theta,0)]-\gamma\alpha UV,$$
$$F_3(\xi,U,V)=b(1-k)V[g(\theta-U,V)-g(\theta,0)].$$

令 $F=(F_1,F_2,F_3)$，则 F 连续可微，$F(0,0,0)=0$ 且 $DF_{(\xi,U,V)}\big|_{(0,0,0)}=0$。令 K 是 $-\Delta$ 在齐次 Robin 边界条件下的逆算子，则由（6）式可得

$$\begin{cases}\xi=K(-a\theta f_1'(z-\theta,\theta)\xi-a[f(z-\theta,\theta)+\theta f_2'(z-\theta,\theta)]U)+KF_1(\xi,U,V),\qquad x\in\Omega,\\U=K(a[f(z-\theta,\theta)+\theta f_2'(z-\theta,\theta)]U+a\theta f_1'(z-\theta,\theta)\xi+[bg(\theta,0)+\gamma\alpha\theta]V)+KF_2(\xi,U,V),\qquad x\in\Omega,\\V=Kb(1-k)g(\theta,0)V+KF_3(\xi,U,V),\qquad x\in\Omega,\\\frac{\partial\xi}{\partial n}+r\xi=0,\qquad\frac{\partial U}{\partial n}+rU=\frac{\partial V}{\partial n}+rV=0,\qquad x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

定义

$$T(b,\xi,U,V)=\begin{pmatrix}K(-a\theta f_1'(z-\theta,\theta)\xi-a[f(z-\theta,\theta)+\theta f_2'(z-\theta,\theta)]U)+KF_1(\xi,U,V)\\K(a[f(z-\theta,\theta)+\theta f_2'(z-\theta,\theta)]U+a\theta f_1'(z-\theta,\theta)\xi+[bg(\theta,0)+\gamma\alpha\theta]V)+KF_2(\xi,U,V)\\Kb(1-k)g(\theta,0)V+KF_3(\xi,U,V)\end{pmatrix},$$

则 T 为可微紧算子。再令 $G(b,\xi,U,V)=(\xi,U,V)^{\mathrm T}-T(b,\xi,U,V)$，于是 G 是 C^1 函数且 $G(b,0,0,0)=0$。显然 $G(b,\xi,U,V)=0$ 带有 $-\theta<\xi<z-\theta,0<U<\theta,0<V<z(1-k)$ 的解是系统（3）的正解。

定理1 设 $a>\lambda_1$，则 $(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)$ 是系统（3）的分歧点，且在 $(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)$ 的某邻域内系统（3）存在正解分支 Γ

$$\Gamma=\{(b(\tau),S(\tau),u(\tau),v(\tau))=(b(\tau),z-\theta-\tau(\xi_1+\kappa_1(\tau)),\theta-\tau(U_1+\kappa_2(\tau)),\tau(\varphi_1+\kappa_3(\tau))):0<\tau<\sigma\},$$

这里 $\sigma>0,b(0)=\frac{\lambda_1^*}{1-k},\kappa_1(0)=\kappa_2(0)=\kappa_3(0)=0,(\kappa_1(\tau),\kappa_2(\tau),\kappa_3(\tau))\in Z,E=Z\oplus\mathrm{span}\{(\xi_1,U_1,\varphi_1)\}$。

证明 记 $L(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0)=D_{(\xi,U,V)}G(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0)$，则 $L(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0)(\xi,U,V)^{\mathrm T}=0$ 等价于

$$\begin{cases}-\Delta\xi+a\theta f_1'(z-\theta,\theta)\xi+a[f(z-\theta,\theta)+\theta f_2'(z-\theta,\theta)]U=0,\qquad x\in\Omega,\\-\Delta U-a[f(z-\theta,\theta)+\theta f_2'(z-\theta,\theta)]U-a\theta f_1'(z-\theta,\theta)\xi-[bg(\theta,0)+\gamma\alpha\theta]V=0,\qquad x\in\Omega,\\-\Delta V-b(1-k)g(\theta,0)V=0,\qquad x\in\Omega,\\\frac{\partial\xi}{\partial n}+r\xi=0,\qquad\frac{\partial U}{\partial n}+rU=\frac{\partial V}{\partial n}+rV=0,\qquad x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{7}$$

显然 $V\neq0$，由方程组（7）的第3个式子可得 $V=\varphi_1$ 并且 $bg(\theta,0)\varphi_1=\frac{\varphi_1}{1-k}K^{-1}$。将方程组（7）的第1和第2个式子相加，得 $\xi+U=\frac{\varphi_1}{1-k}+\gamma\alpha K(\theta\varphi_1)$。于是对方程组（7）的第1个式子经过复杂计算有

$$\xi_1=L^{-1}(-\frac{a}{1-k}[f(z-\theta,\theta)+\theta f_2'(z-\theta,\theta)]\varphi_1-a\gamma\alpha[f(z-\theta,\theta)+\theta f_2'(z-\theta,\theta)]K(\theta\varphi_1))<0.$$

同理可得 $U_1=L^{-1}([\frac{\lambda_1^*}{1-k}g(\theta,0)+\gamma\alpha\theta]\varphi_1+\frac{a}{1-k}\theta f_1'(z-\theta,\theta)\varphi_1+a\gamma\alpha\theta f_1'(z-\theta,\theta)K(\theta\varphi_1))>0$。因此，$N(L(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0))=\mathrm{span}\{(\xi_1,U_1,\varphi_1)^{\mathrm T}\}$。根据Fredholm选择公理易得

$$R(L(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0))=\{(\xi,U,V)^{\mathrm T}\in E:\int_\Omega g(\theta,0)\varphi_1V\mathrm dx=0\}.$$

因此，$\dim(N(L(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0))) = \operatorname{co\,dim}(R(L(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0))) = 1$。

另一方面，令$L_2(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0)(\xi_1,U_1,\varphi_1)^{\mathrm{T}} = D^2_{b(\xi,U,V)}G(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0)(\xi_1,U_1,\varphi_1)^{\mathrm{T}}$，则

$$L_2(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0)(\xi_1,U_1,\varphi_1)^{\mathrm{T}} = (0,-\frac{1}{\lambda_1^*}\varphi_1,-\frac{1-k}{\lambda_1^*}\varphi_1)^{\mathrm{T}} \notin R(L(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0)).$$

由简单特征值的局部分歧定理[19]可知，$(\frac{\lambda_1^*}{1-k},0,0,0)$是$G(b,\xi,U,V)$的分歧点，则存在$\delta>0$和$C^1$连续曲线$(b(\tau),\kappa_1(\tau),\kappa_2(\tau),\kappa_3(\tau))$:$(-\sigma,\sigma)\to\mathbf{R}\times E$满足

$$b(0)=\frac{\lambda_1^*}{1-k},\ \kappa_1(0)=\kappa_2(0)=\kappa_3(0)=0,\ (\kappa_1(\tau),\kappa_2(\tau),\kappa_3(\tau))\in Z,\ E=Z\oplus\operatorname{span}\{(\xi_1,U_1,\varphi_1)\},$$

且

$$(b(\tau),\xi(\tau),U(\tau),V(\tau)) = (b(\tau),\tau(\xi_1+\kappa_1(\tau)),\tau(U_1+\kappa_2(\tau)),\tau(\varphi_1+\kappa_3(\tau)))(0<\tau<\sigma)$$

满足$G(b(\tau),\xi(\tau),U(\tau),v(\tau))=0$。于是$(b(\tau),S(\tau),u(\tau),v(\tau))(0<\tau<\sigma)$是系统（3）的正解，其中

$$(b(\tau),S(\tau),u(\tau),v(\tau)) = (b(\tau),z-\theta-\tau(\xi_1+\kappa_1(\tau)),\theta-\tau(U_1+\kappa_2(\tau)),\tau(\varphi_1+\kappa_3(\tau)))(0<\tau<\sigma).$$

下面利用全局分歧理论对定理1中局部分歧解Γ进行延拓。令$b_i(\lambda)(\lambda\geqslant 1)$是问题

$$\lambda\Delta\varphi + b_i(\lambda)(1-k)g(\theta,0)\varphi = 0,\quad x\in\Omega;\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n}+r\varphi=0,\quad x\in\partial\Omega$$

的特征值。显然，在$(1,+\infty)$上$b_i(\lambda)$关于λ严格递增且

$$0<b_1(\lambda)<b_2(\lambda)\leqslant b_3(\lambda)\leqslant\cdots\to\infty,\qquad b_1(1)=\lambda_1^*.$$

类似文献［2］全局分歧条件的分析过程可得$b(1-k)<\lambda_1^*$时$i(T(b,\cdot),(0,0,0))=1$；$\lambda_1^*<b(1-k)<b_2(1)$时$i(T(b,\cdot),(0,0,0))=-1$。因此根据全局分歧定理[20]可得在$\mathbf{R}\times E$中系统（3）存在从点$(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)$分歧出的连通分支$\Upsilon$且必满足以下3个条件之一

（i）$\Upsilon-\{(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)\}$连接点$(\tilde{b},z-\theta,\theta,0)$，其中$I-K(\tilde{b})$不可逆且$\tilde{b}\neq\frac{\lambda_1^*}{1-k}$；

（ii）$\Upsilon-\{(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)\}$在$\mathbf{R}\times E$中连接到$\infty$；

（iii）$\Upsilon-\{(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)\}$包含点$(b,z-\theta-S,\theta-u,v)$和$(b,z-\theta+S,\theta+u,-v)$，其中$(S,u,v)\neq(0,0,0)$。

定理2 设$a>\lambda_1$。则$\Upsilon-\{(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)\}$在$P$中连接$(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)$到$\infty$且

$$\{b:(b,S,u,v)\in\Upsilon\} = (\frac{\lambda_1^*}{1-k},+\infty).$$

证明 首先证明$\Upsilon-\{(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)\}\subset P$。假设$\Upsilon-\{(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)\}\nsubseteq P$。则存在点$(\tilde{b},\tilde{S},\tilde{u},\tilde{v})\in(\Upsilon-\{(\frac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)\})\cap\partial P$和序列$\{(b_i,S_i,u_i,v_i)\}\subset\Upsilon\cap P$，使得当$i\to\infty$时$(b_i,S_i,u_i,v_i)\to(\tilde{b},\tilde{S},\tilde{u},\tilde{v})$。因为$(\tilde{b},\tilde{S},\tilde{u},\tilde{v})\in\partial P$，所以要么$\tilde{S}\geqslant 0$且存在$x_0\in\overline{\Omega}$使得$\tilde{S}(x_0)=0$；要么$\tilde{u}\geqslant 0$且存在$x_1\in\overline{\Omega}$使得$\tilde{u}(x_1)=0$；要么$\tilde{v}\geqslant 0$且存在$x_2\in\overline{\Omega}$使得$\tilde{v}(x_2)=0$。由强最大值原理可知$\tilde{S}(x)>0(x\in\overline{\Omega})$。于是再由强最大值值原理得$\tilde{u}\equiv 0$或$\tilde{v}\equiv 0$。显然$\tilde{u}\equiv 0$可推出$\tilde{v}\equiv 0$。因此考虑以下两种情况

（i）假设$\tilde{u}\equiv 0$且$\tilde{v}\equiv 0$。则$\tilde{S}=z$。于是$(b_i,S_i,u_i,v_i)\to(\tilde{b},z,0,0)$。令$U_i=\frac{u_i}{\|u_i\|_\infty}$，则有

$$\Delta U_i + aU_if(S_i,u_i) - b_i\frac{v_i}{1+h_2u_i+m_2v_i}U_i - \gamma\alpha v_iU_i = 0,\quad x\in\Omega;\qquad \frac{\partial U_i}{\partial n}+rU_i=0,\quad x\in\partial\Omega.$$

由L^p估计和Sobolev嵌入定理可知存在$U\in C_B^1(\overline{\Omega})$满足$U\geqslant 0,U\not\equiv 0$且

$$\Delta U + aUf(z,0) = 0,\quad x\in\Omega;\qquad \frac{\partial U}{\partial n}+rU=0,\quad x\in\partial\Omega.$$

根据强最大值原理得 $U>0(x\in\overline{\Omega})$。于是 $a=\lambda_1$，矛盾。

（ii）假设 $\tilde{u}\not\equiv 0$ 且 $\tilde{v}\equiv 0$。则 $\tilde{S}=z-\theta,\tilde{u}=\theta$。于是 $(b_i,S_i,u_i,v_i)\to(\tilde{b},z-\theta,\theta,0)$。令 $V_i=\dfrac{v_i}{\|v_i\|_\infty}$，则

$$\Delta V_i+b_i(1-k)V_i g(u_i,v_i)=0,\qquad x\in\Omega;\qquad \frac{\partial V_i}{\partial n}+rV_i=0,\qquad x\in\partial\Omega.$$

类似（i）可得 $\tilde{b}=\dfrac{\lambda_1^*}{1-k}$，矛盾。故 $\Upsilon-\{(\dfrac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)\}\subset P$。再次由 L^p 估计和Sobolev嵌入定理以及引理3可得存在不依赖于 b 的正常数 M 使得 $\|S\|,\|u\|,\|v\|\leqslant M$。于是 $\Upsilon-\{(\dfrac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)\}$ 在 P 中只能沿着参数 b 到 ∞。因此根据引理3易得 $\{b:(b,S,u,v)\in\Upsilon\}=(\dfrac{\lambda_1^*}{1-k},+\infty)$。

最后结合引理3和定理2可得系统（3）正解的全局存在条件。

定理3 设 $a>\lambda_1$。则系统（3）存在正解当且仅当 $b>\dfrac{\lambda_1^*}{1-k}$。

3 正解的稳定性

本小节考察定理1所得系统（3）的局部分歧解 $(S(\tau),u(\tau),v(\tau))$ 的稳定性。

引理4 $b(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处的导数满足

$$b'(0)=\frac{\lambda_1^*\int_\Omega(g_1'(\theta,0)U_1-g_2'(\theta,0)\varphi_1)\varphi_1^2\mathrm{d}x}{(1-k)\int_\Omega g(\theta,0)\varphi_1^2\mathrm{d}x}.\tag{8}$$

证明 将 $(b(\tau),S(\tau),u(\tau),v(\tau)=(b(\tau),z-\theta-\tau(\xi_1+\kappa_1(\tau)),\theta-\tau(U_1+\kappa_2(\tau)),\tau(\varphi_1+\kappa_3(\tau)))$ 代入系统（3）的第3个方程中，得

$$\Delta(\varphi_1+\kappa_3(\tau))+(1-k)b(\tau)g(\theta-\tau(U_1+\kappa_2(\tau)),\tau(\varphi_1+\kappa_3(\tau)))(\varphi_1+\kappa_3(\tau))=0.$$

上式两边关于 τ 微分并令 $\tau=0$，得

$$\Delta\kappa_3'(0)+(1-k)[b'(0)g(\theta,0)\varphi_1+b(0)(-g_1'(\theta,0)U_1+g_2'(\theta,0)\varphi_1)\varphi_1+b(0)g(\theta,0)\kappa_3'(0)]=0.$$

上式乘以 φ_1 并在 Ω 上积分得（8）式成立。

令 $X_1=(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^3\cap E,F=(C^\alpha(\overline{\Omega}))^3(0<\alpha<1),i:X_1\to F$ 是包含映射，$L(b,z-\theta,\theta,0)$ 是系统（3）在 $(z-\theta,\theta,0)$ 处的线性化算子，$L(b(\tau),S(\tau),u(\tau),v(\tau))$ 是 $(b(\tau),S(\tau),u(\tau),v(\tau))$ 处的线性化算子。根据 i – 简单特征值的定义和定理1的证明得

引理5 0是 $L(\dfrac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)$ 的 i – 简单特征值且 $L(\dfrac{\lambda_1^*}{1-k},z-\theta,\theta,0)$ 的所有特征值位于左半复平面。

由文献［21］有 $\lim\limits_{\tau\to0}(\tau b'(\tau)\mu'(\dfrac{\lambda_1^*}{1-k}))\big/\eta(\tau)=-1$，这里 $\mu(b)$ 和 $\eta(\tau)$ 分别是 $L(b,z-\theta,\theta,0)$ 和 $L(b(\tau),S(\tau),u(\tau),v(\tau))$ 的主特征值。另外由引理1易得 $\mu'(\dfrac{\lambda_1^*}{1-k})>0$。又根据（8）式得 $b'(0)>0$。因此存在 $0<\sigma\ll1$ 使得 $b'(\tau)>0(0<\tau<\sigma)$。于是有如下定理

定理4 设 $a>\lambda_1$。若 $0<\tau\ll1$，则系统（3）的正分歧解 $(S(\tau),u(\tau),v(\tau))$ 稳定。

参考文献:

［1］ HSU S B，WALTMAN P. On a system of reaction-diffusion equations arising from competition in an unstirred chemostat［J］. SIAM Journal on Applied Mathematics，1993，53：1026-1044.

［2］ WU J H. Global bifurcation of coexistence state for the competition model in the chemostat［J］. Nonlinear Analysis，2000，39：817-835.

［3］ HSU S B，WALTMAN P. A model of the effect of anti-competitor toxins on plasmid-bearing，plasmid-free competition［J］. Taiwanese J Math，2002，6：135-155.

[4] WU J H, NIE H, WOLKOWICZ G. A mathematical model of competition for two essential resources in the unstirred chemostat [J]. SIAM Journal Applied Mathematics, 2004, 65: 209-229.

[5] ZHU L M, HUANG X C, SU H Q. Bifurcation for a functional yield chemostat when one competitor produces a toxin [J]. J Math Anal Appl, 2007, 329: 891-903.

[6] ZHENG S N, GUO H J, LIU J. A food chain model for two resources in unstirred chemostat [J]. Appl Math Comput, 2008, 206: 389-402.

[7] 李艳玲, 李海侠, 吴建华. 一类非均匀Chemostat模型的共存态[J]. 数学学报, 2009, 52(1): 141-152.
LI Y L, LI H X, WU J H. Coexistence states of the unstirred Chemostat model [J]. Acta Mathematica Sinica, 2009, 52(1): 141-152.

[8] WANG Y F, YIN J X. Global dynamics of the periodic un-stirred chemostat with a toxin-producing competitor [J]. Commun Pure Appl Anal, 2010, 9: 1639-1651.

[9] 王利娟, 姜洪领. 非均匀Chemostat竞争模型的周期解[J]. 中山大学学报(自然科学版),2010, 49(3): 12-17.
WANG L J, JIANG H L. Periodic solution for the competition model in the unstirred Chemostat [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2010, 49(3): 12-17.

[10] 姜洪领, 王利娟. 一类无搅拌Chemostat模型平衡态正解存在性与数值模拟[J]. 中山大学学报(自然科学版),2011, 50(3):11-16.
JIANG H L, WANG L J. Existences and numerical simulation of positive solution for a class of unstirred Chemostat model [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2011, 50(3): 11-16.

[11] NIE H, WU J H. The effect of toxins on the plasmid-bearing and plasmid-free model in the unstirred chemostat [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2012, 32(1): 303-329.

[12] NIE H, WU J H. Multiplicity results for the unstirred chemostat model with general response functions [J]. Science in China: A, 2013, 56: 2035-2050.

[13] NIE H, LIU N, WU J H. Coexistence solutions and their stability of an unstirred chemostat model with toxins [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2014, 20: 36-51.

[14] 李海侠. 一类带B-D反应项的非均匀Chemostat模型正解的存在性和多解性[J]. 工程数学学报, 2015, 32(3): 369-380.
LI H X. Existence and multiplicity of positive solutions for an unstirred chemostat model with B-D functional response [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2015, 32(3): 369-380.

[15] 贾婷婷, 聂华, 张瑜. 一类具有外加毒素的非均匀恒化器模型分析[J]. 应用数学学报, 2017, 40(3): 377-399.
JIA T T, NIE H, ZHANG Y. The analysis of the unstirred chemostat model with external toxin [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2017, 40(3): 377-399.

[16] LI H X, WU J H, LI Y L, et al. Positive solutions to the unstirred chemostat model with Crowley-Martin functional response [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2018, 23(8): 2951-2966.

[17] NIE H, HSU S B, WANG F B. Steady-state solutions of a reaction-diffusion system arising from intraguild predation and internal storage [J]. Journal of Differential Equations, 2019, 266(12): 8459-8491.

[18] BELGACEM F. Elliptic boundary value problems with indefinite weights: variational formulations of the principal eigenvalue and applications [M]. Harlow: Addison-Wesley Longman, 1997.

[19] CRANDALL M G, RABINOWITZ P H. Bifurcation from simple eigenvalue [J]. Journal of Functional Analysis, 1971, 8: 321-340.

[20] RABINOWITZ P H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems [J]. Journal of Functional Analysis, 1971, 7(3): 487-513.

[21] CRANDALL M G, RABINOWITZ P H. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability [J]. Arch Rational Mech Anal, 1973, 52(2): 161-180.

（责任编辑　冯兆永）